DEVOIR NUMÉRO 4 VERSION A CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Barème et exigences.

Exercice 1 : 48 points.

1. 3 points, 1 pour le rang de B, 1 pour citer le théorème du rang, 1 pour conclure.

2. 3 points pour un programme correct, 1 point pour l'utilisation appropriée de la fonction `matrix_power`.

3. 9 points. 2 points pour le polynôme annulateur, aucune justification n'est demandée. Puis 1 pour les racines du polynômes. L'une d'entre elle est 0 dont on sait déjà qu'elle est valeur propre. Puis 4 points pour la recherche des deux espaces propres pour $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$. 1 point pour D et 1 dernier point pour citer la formule de changement de base et donner la relation entre B et B.

4. 2 points, récurrence habituelle (1 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité).

5. 1 point. Il y avait une erreur d'énoncé, point bonus.

6. 3 points, 1 pour écrire A sous la forme qui permet d'utiliser la formule du binôme, 1 pour la formule du binôme avec la "vérification de la commutativité", 1 pour la formule finale.

7. 3 points, beaucoup de calculs, 1 pour expliciter la matrice $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j$, 2 pour faire le produit matriciel.

8. 1 point, question de cours.

9. 4 points, 1 par ligne, 1 bonus si tout est correct.

10. 2 points, 1 pour l'explication, 1 pour conjecturer l'état stable.

11. **a.** 4 points, 1 pour chaque i, 1 point (cours) pour donner la définition de la matrice de transition.

b. 2 points.

c. 3 points, 1 pour chaque colonne de u_{k+1}.

d. 2 points, question de cours (mais difficile) : il s'agit de trouver un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.

e. 2 points, ce n'est pas évident, il faut justifier qu'avec ce choix de U_0, on retrouve bien la loi de X_1 (uniforme).

f. 1 point, évident quand on a trouvé la première ligne de A auparavant.

g. 2 points, on démontre finalement le résultat de convergence conjecturé. 1 pour la limite en loi, 1 pour faire la remarque que la limite est bien l'état stable.

h. 1 point, calcul facile.

Date: 11 Janvier 2025 08h30-12h00.

http://louismerlin.fr.

Exercice 2 : 30 points. Barème officiel.

1. **a.** 2 points, 1 pour le couple (a, b), 1 pour la rigueur et l'unicité.
   b. 2 points, 1 pour les primitives correctes, 1 pour la fin du calcul.
2. 3 points, 1 pour ajuster les constantes, 1 pour la primitive, 1 pour le résultat final simplifié. On enlève 1 point en tout si les valeurs absolues sont oubliées.
3. **a.** 2 points, 1 pour citer la linéarité, 1 pour le calcul.
   b. 4 points, 2 par ligne, 1 point en moins si décalage d'indice, 1 point en moins si n au lieu de k.
4. **a.** 3 points, 2 pour l'encadrement de la fonction (1 à gauche, 1 à droite), 1 pour finir.
   b. 1 point, il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes.
   c. 4 points, 1 pour isoler le bon encadrement, 1 pour le critère de comparaison, 1 pour "série à termes positifs", 1 pour citer une série de Riemann divergente.
5. **a.** 2 points, 1 pour dire que le graphique donne $\lim_{n\to+\infty} 3nu_n$, 1 pour conclure.
   b. 3 points, 1 pour "classe $\mathcal{C}^1$, 2 pour la réalisation.
   c. 2 points, 1 pour $\frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{(4-x^2)^2} \leqslant \frac{1}{9}$, 1 pour finir (aucune exigence sur quoi que ce soit).
   d. 2 points, 1 pour l'idée de calculer $3nu_n$, 1 pour finir.

Exercice 3 : 26 points.

1. **a.** 2 points, question classique.
   b. 2 points, aucun calcul à faire, le système qui donne le noyau est déjà résolu.
2. 2 points, 1 pour la linéarité (qui provient de celle de la trace), 1 pour l'ensemble image.
3. **a.** 3 points, 2 pour tous les calculs, 1 pour écrire la matrice en conclusion.
   b. 2 points, il suffit de faire le calcul mais la question précédente est bloquante.
   c. 2 points, 1 pour dire que la seule valeur propre possible est 1, 1 pour répéter l'argument déjà vu 1000 fois sur la diagonalisabilité des matrices qui n'ont qu'une seule valeur propre.
   d. 2 points, le mieux est évidemment de récupérer le polynôme annulateur. On accepte A^{-1} en fonction de A sans expliciter.
4. **a.** 2 points, 1 pour faire le lien avec le noyau de la trace, 1 pour conclure.
   b. 2 points, 1 pour J vecteur propre, 1 pour la valeur propre.
   c. (i) 2 points, pas grand chose à faire de plus mais attention à la rédaction (on n'accepte pas l'argument sur la somme des dimensions des espaces propres).
   (ii) 2 points, 1 pour suivra la démarche, 1 pour la contradiction.
   (iii) 1 point, question de conclusion.
   d. 2 points, 1 pour faire le lien avec le fait que 0 ne soit pas valeur propre, 1 pour étudier la condition.

Orthographe, présentation, lisibilité : 5 points.

Total : 109 points. divisés par 4 pour faire une note sur 20.

2. Commentaires / erreurs fréquentes.

Stratégie.

1.

Exercice 1.

1.

Exercice 2.

1.

Exercice 3.

1.

3. Correction détaillée.

Seul la correction de l'exercice 1 ne se trouve pas en ligne.

Correction 1 **1.** La matrice B vaut exactement $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le rang est par définition la dimension de l'espace engendré par les colonnes

$$\operatorname{rg}(B) = \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les colonnes numéro 2 et 3 étant les mêmes, on a

$$\operatorname{rg}(B) = \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les colonnes numéro 1 et 2 n'étant pas colinéaires, on conclut que $\operatorname{rg}(B) = 2$.

D'après le théorème du rang, on a aussi

$$3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{rg}(B) + \dim \operatorname{Ker}(B).$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(B)$ est de dimension 1. Mais $\operatorname{Ker}(B)$ est l'espace propre $E_0(B)$. On vient donc de justifier que 0 est valeur propre de B.

2.

```python
import numpy.linalg as al

def poly_mat(P,M):
  S = 0
  for k in range(len(P)) :
    S = S + P[k]*al.matrix_power(M,k)
  return S
```

3. Le programme présenté calcule et affiche $-4B^2 + 9B^4$. On en déduit que le polynôme P défini par $P(x) = -4x^2 + 9x^4$ est un polynôme annulateur de B. Or on a

$$-4x^4 + 9x^2 = x^2(-4 + 9x^2) = x^2\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

et en déduit que $\operatorname{sp}(B) \subset \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

On sait déjà que 0 est valeur propre de B. Pour construire la matrice P, il nous fait absolument l'espace propre E_0. Plutôt que de faire un calcul, on peut simplement constater que puisque les 2ème et 3ème colonnes de B sont identiques, cela signifie que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B. Enfin, puisqu'on sait aussi que le noyau est de dimension 1, on conclut que $E_0(B) = \operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Il reste alors à décider si $\pm\frac{2}{3}$ sont aussi valeur propres.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
BX = \frac{2}{3}X \quad &\iff \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{3} \\ \frac{2y}{3} \\ \frac{2z}{3} \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \\ 2x - 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ x & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{2}{3}$ est bien valeur propre et que $E_{\frac{2}{3}}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
BX = -\frac{2}{3}X \quad &\iff \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{3} \\ -\frac{2y}{3} \\ -\frac{2z}{3} \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 0 \\ 2x + 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ x & = & -z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que $-\frac{2}{3}$ est bien valeur propre et que $E_{-\frac{2}{3}}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Finalement on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et la formule de changement de base donne bien

$$B = PDP^{-1}.$$

4. On procède par récurrence sur $j \in \mathbb{N}^*$ pour montrer les propriétés

$$\mathcal{P}_j : \text{"} B^j = PD^jP^{-1} \text{"}.$$

Initialisation : Lorsque $j = 1$, la propriété à démontrer se lit $B = PDP^{-1}$ que nous venons de montrer à la question précédente. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Supposons donc $\mathcal{P}_j$ pour un entier j arbitraire, c'est-à-dire $B^j = PD^jP^{-1}$. Alors

$$B^{j+1} = BB^j = PDP^{-1}PD^jP^{-1} = PDD^jP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1},$$

ce qui démontre $\mathcal{P}_{j+1}$.

5. Le calcul habituel avec la méthode du pivot donne
$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On a donc $A = B + \frac{1}{3}I$ puis
$$A^k = \left(B + \frac{1}{3}I\right)^k = \left(PDP^{-1} + P\frac{1}{3}IP^{-1}\right)^k = \left(P\left(D + \frac{1}{3}I\right)P^{-1}\right)^k = P\left(D + \frac{1}{3}I\right)^k P^{-1}.$$
La dernière égalité se justifie par une récurrence analogue à celle de la question précédente. On applique maintenant la formule du binôme à $\left(D + \frac{1}{3}I\right)^k$, ce qui est permis puisque D et I commutent. On a
$$\left(D + \frac{1}{3}I\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j$$
et la formule pour A s'en déduit en multipliant par P et P^{-1}.

7. Plus explicitement, on
$$D^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$
Puis
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}.$$
Le $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ en haut à gauche de la matrice précédente s'explique par le coefficient en $j = 0$ de la somme précédente (on rappelle que $D^0 = I$). Or, compte-tenu de la formule du binôme, appliquée cette fois-ci à des nombres réels, on a
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$
Pour obtenir A^k, il reste alors à multiplier par P et P^{-1} :
$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2\left(\frac{1}{3}\right)^k & 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ 2 & 1 & 1 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Il suit du 2ème point que X_1 suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$.

9.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(k) :
  x = rd.randint(1,4)
  for i in range(k-1) :
    tirage = rd.randint(1,4)
    if x == 1 :
      x = rd.randint(1,4)
    else :
      if tirage != x :
        x = 1
  return x
```

10. Ce programme simule 1000 fois X_{50}, puis calcule les fréquences d'apparition des différents états 1, 2 et 3 et enfin représente ces fréquences d'apparition de ces différents états sous forme de diagramme. Le nombre 50 étant suffisamment grand, on peut supposer que X_{50} est proche de la loi limite. On constate alors que la loi empirique de X_{50} ainsi obtenue et la loi où 1 est obtenue est avec probabilité $\frac{1}{2}$ et les deux autres états sont équiprobables. On sait qu'une chaîne de Markov converge vers un état stable et on conjecture donc que l'état stable de la chaîne a pour loi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

11. **a.**

- Pour $i = 1$, on a $P_{[X_i=1]}(X_{i+1=1} = P_{[X_i=1]}(X_{i+1=2} = P_{[X_i=1]}(X_{i+1=3} = \frac{1}{3}$
- Pour $i = 2$, on a $P_{[X_i=2]}(X_{i+1=1} = \frac{2}{3}$ (il y a deux chances sur 3 de passer à 1 si la boule piochée lors du $i+1$-ième tirage est 1 ou 3). Et $P_{[X_i=2]}(X_{i+1=2} = \frac{1}{3}$ (la seule possibilité de passer de 2 à 2 est de piocher la boule 2). Et donc $P_{[X_i=2]}(X_{i+1=3} = 0$.
- De même $P_{[X_i=3]}(X_{i+1=1} = \frac{2}{3}$, $P_{[X_i=3]}(X_{i+1=2} = 0$ et $P_{[X_i=3]}(X_{i+1=3} = \frac{1}{3}$. Ces différentes probabilités forment bien la matrice A de la partie **I**.

b.

c. Nous allons utiliser trois fois le même système complet d'événements $\{[X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\}$ pour calculer tour à tour les trois composantes de U_{k+1} :

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) =$$

$$\mathbb{P}([X_k = 1])\,\mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_k = 2])\,\mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_k = 3])\,\mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1} = 1])$$

$$= \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_k = 1]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_k = 2]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_k = 3]).$$

En utilisant exactement la même stratégie mais cette fois avec $[X_{k+1} = 2]$ et $[X_{k+1} = 3]$, on obtient aussi

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = 2]) = \frac{2}{3}\mathbb{P}([X_k = 1]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_k = 2])$$

et

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = 3]) = \frac{2}{3}\mathbb{P}([X_k = 1]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_k = 3]).$$

Ces trois égalités signifient que $U_{k+1} = U_k A$.

d. C'est une question un peu plus originale mais très facile. On rappelle que les états stables sont les vecteurs propres de la transposée de la matrice de transition dont toutes les composantes sont positives et dont la somme est égale à 1. Or on a ${}^tA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Soit donc $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
{}^tA = X \iff & \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
\iff & \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\ 3y\\ 3z\end{pmatrix}\\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} x+2y+2z & = & 3x\\ x+y & = & 3y\\ x+z & = & 3z\end{array}\right.\\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} -2x+2y+2z & = & 0\\ x-2y & = & 0\\ x-2z & = & 0\end{array}\right.\\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y\\ x & = & 2z\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On constate que $E_1({}^tA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$. Il reste à trouver le vecteur de $E_1({}^tA)$ qui a toutes ses composantes positives et dont la somme des composantes fait 1. Évidemment, on choisit $X = \begin{pmatrix}1/2\\ 1/4\\ 1/4\end{pmatrix}$. On retombe sur l'état stable que nous avions trouvé par la simulation informatique à la question **10**.

e. On procède par récurrence, la seule difficulté qui s'ajoute ici consiste à montrer que le choix de U_0 est cohérent avec la condition initiale que le texte impose ("au premier tirage, X_1 prend la valeur de la boule obtenue à ce tirage"), soit $U_1 = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}\right)$. On montre en effet que

$$(1, \quad 0, \quad 0)\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}\right).$$

Puisqu'il faut montrer les propriétés $\mathcal{P}_k$: "$U_k = U_0A^k$" pour tout $k \geqslant 1$, nous venons de faire l'initialisation. Pour l'hérédité, on suppose $U_k = U_0A^k$ et on a $U_{k+1} = U_kA$ d'après la question **c**. Puis d'après l'hypothèse de récurrence $U_{k+1} = U_0A^kA = U_0A^{k+1}$, ce qui montre que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

f. On constate que U_0A^k donne un vecteur-ligne égale à la première ligne de la matrice A^k. Or nous avons la première ligne de la matrice A^k depuis la question **7**. On obtient exactement la loi qui est donnée.

g. Lorsque k tend vers $+\infty$, on sait que $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ tend vers 0. Ainsi, faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}([X_k=1]) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}([X_k=2]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}([X_k=3]) = \frac{1}{4}.$$

On s'aperçoit que la chaîne de Markov converge en loi vers son (seul) état stable. C'est la manifestation dans ce cas particulier d'un phénomène général.

h. On fait le calcul exact :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= \mathbb{P}([X_k = 1]) + 2\mathbb{P}([X_k = 2]) + 3\mathbb{P}([X_k = 3]) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\
&= \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k
\end{aligned}$$